Počítačová grafika III
Světlo, Radiometrie – Cvičení

Jaroslav Křivánek, MFF UK

Jaroslav.Krivanek@mff.cuni.cz

Příklady

- Spočítejte velikost povrchu jednotkové koule.
- Spočítejte velikost povrchu kulového vrchlíku o úhlu θ_o.
- Spočítejte velikost povrchu kulového pásu mezi úhly θ_o a θ_1.
- Spočítejte velikost povrchu „výřezu“ koule o úhlu ϕ_o.

Příklady

- Pod jakým prostorovým úhlem pozorujeme (nekonečnou) rovinu z bodu mimo tuto rovinu?
- Pod jakým prostorovým úhlem pozorujeme kouli o poloměru R, jejíž střed je vzdálen D od stanoviště?

Izotropní bodové světlo

- **Q:** Jaký je výkon (tok) izotropního bodového zdroje s konstatní zářivostí (intenzitou) I ve všech směrech.

Izotropní bodové světlo

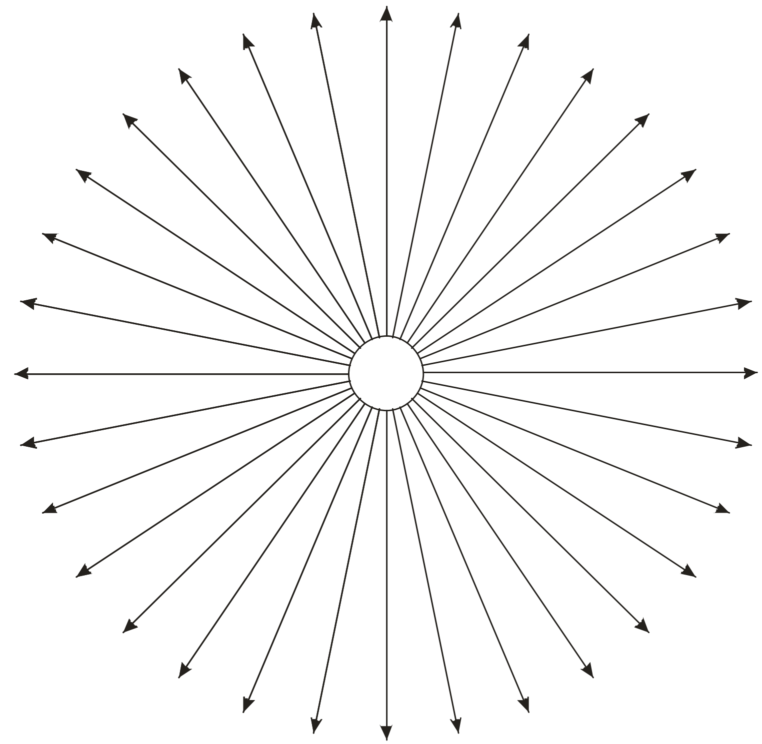
- **A:** Celkový tok:

$$\Phi = \int_{\Omega} I(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \left| \begin{array}{c} \textit{substituce}: \\ \mathrm{d}\omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \end{array} \right|$$

$$= I \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= I\,2\pi \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= 4\pi I$$



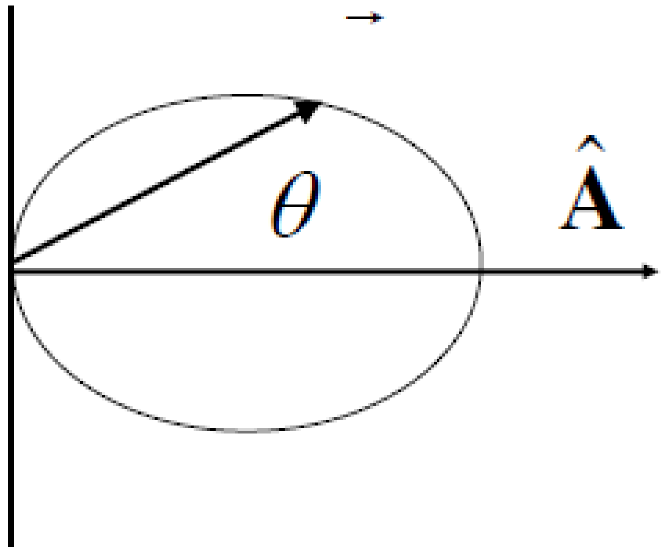
$$I = \frac{\Phi}{4\pi}$$

Příklad

- Jaký je výkon (tok) bodového zdroje se zářivostí (intenzitou):

$$I(\omega) = I_0 \max\{0, \omega \cdot \vec{d}\}^s$$

Warn's Spotlight



$$I(\quad) \quad \cos^s \quad (\vec{\ } \quad \hat{\mathbf{A}})^s$$

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 I(\omega)\, d\cos\theta\, d\varphi = 2\pi \int_0^1 \cos^s\theta\, d\cos\theta = \frac{2\pi}{s+1}$$

$$I(\omega) = \Phi \frac{s+1}{2\pi} \cos^s\theta$$

Příklad

- Jaký je výkon (tok) bodového zdroje se zářivostí (intenzitou):

$$I(\theta,\phi) = \begin{cases} I_0 & \theta \le \alpha \\ I_0 \dfrac{\beta-\theta}{\beta-\alpha} & \alpha < \theta < \beta \\ 0 & \theta \ge \beta \end{cases}$$

Constant part

$$\Phi_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} I_0 \sin\theta d\theta d\phi = I_0 2\pi (1 - \cos\alpha).$$

Linear part

$$\Phi_2 = \int_0^{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} I_0 \frac{\beta - \theta}{\beta - \alpha} \sin\theta d\theta d\phi = I_0 \frac{2\pi}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} (\beta - \theta) \sin\theta d\theta \tag{1}$$

The last integral is the sum of the following two integrals:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \beta \sin\theta d\theta = \beta\cos\alpha - \beta\cos\beta \tag{2}$$

$$-\int_{\alpha}^{\beta} \theta \sin\theta d\theta = \Big| \sin\theta - \theta\cos\theta \Big|_{\beta}^{\alpha} = \sin\alpha - \alpha\cos\alpha - \sin\beta + \beta\cos\beta \tag{3}$$

Plugging (2) and (3) into (1) and rearranging, we get

$$\Phi_2 = I_0 \frac{2\pi}{\beta - \alpha} [(\beta - \alpha)\cos\alpha + \sin\alpha - \sin\beta] = I_0 2\pi \left[\cos\alpha - \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\beta - \alpha} \right]. \tag{4}$$

Total flux

$$\boxed{\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = I_0 2\pi \left[1 - \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\beta - \alpha} \right]} \tag{5}$$

Otázka

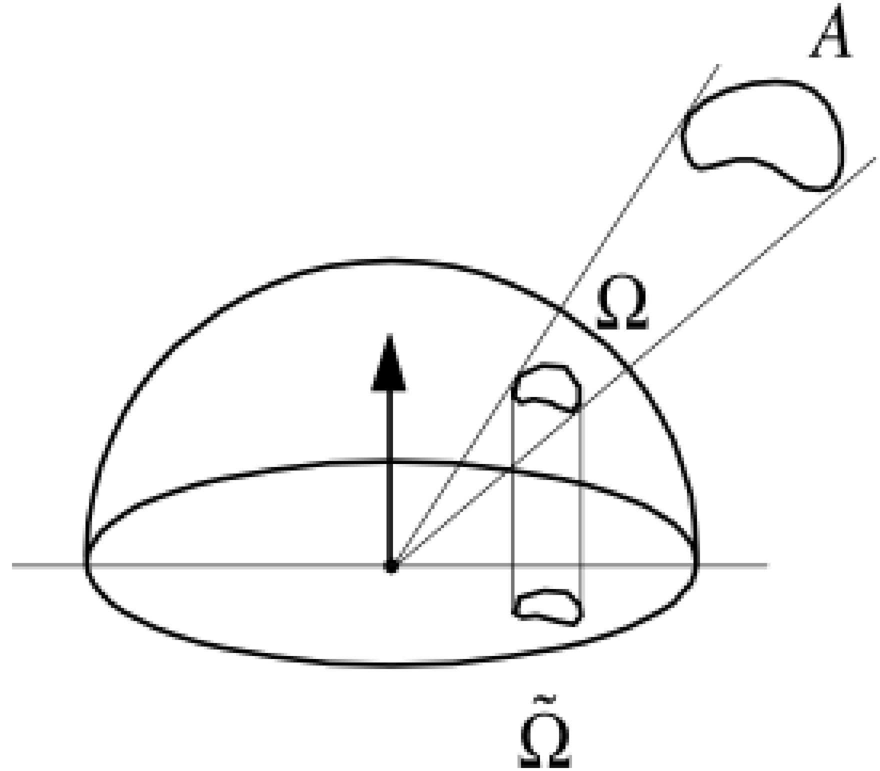
- Jakou hodnotu ozáření (irradiance) $E(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{x}$ způsobí uniformní Lambertovský plošný zdroj pozorovnaný z $\mathbf{x}$ pod prostorovým úhlem Ω?

Uniform Area Source

$$E(x) = \int_{H^2} L \cos\theta \, d\omega$$

$$= L \int_{\Omega} \cos\theta \, d\omega$$

$$= L\tilde{\Omega}$$

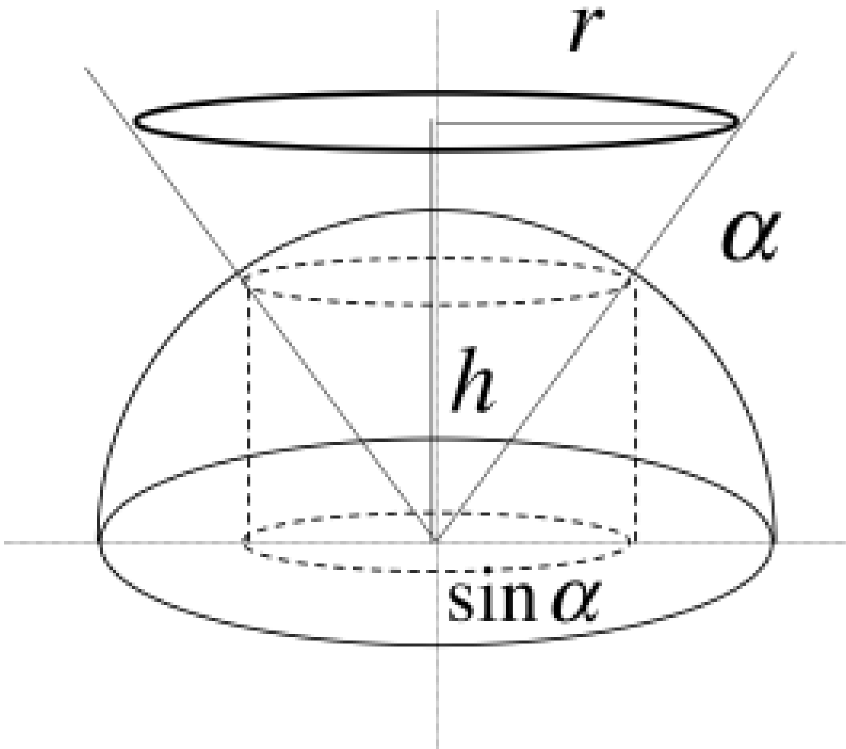


Otázka

- Pod jakým **promítnutým prostorovým úhlem** Ω pozorujeme z bodu $\mathbf{x}$ kruh o poloměru r jehož střed je umístěn ve vzdálenosti h od bodu $\mathbf{x}$.

Uniform Disk Source

Geometric Derivation



$$\tilde{\Omega} = \pi \sin^2 \alpha$$

Algebraic Derivation

$$\tilde{\Omega} = \int_1^{\cos\alpha} \int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\phi \, d\cos\theta$$

$$= 2\pi \left. \frac{\cos^2\theta}{2} \right|_1^{\cos\alpha}$$

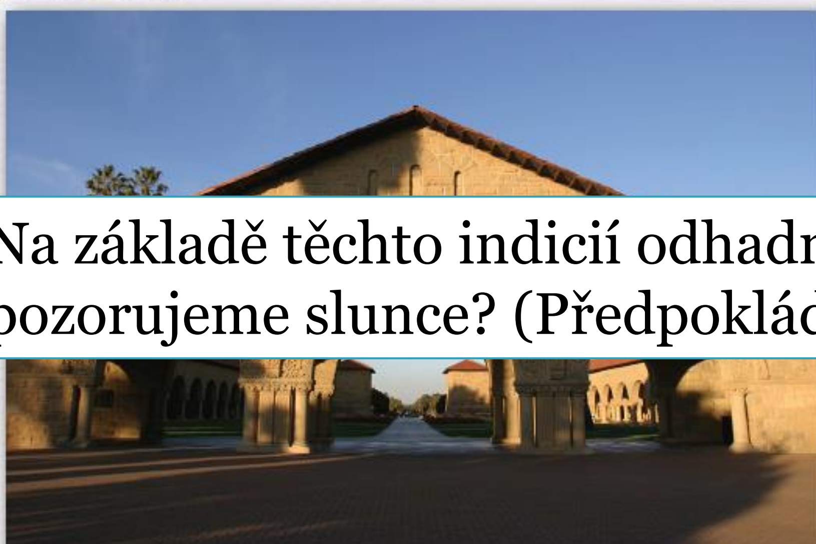
$$= \pi \sin^2 \alpha$$

$$= \pi \frac{r^2}{r^2 + h^2}$$

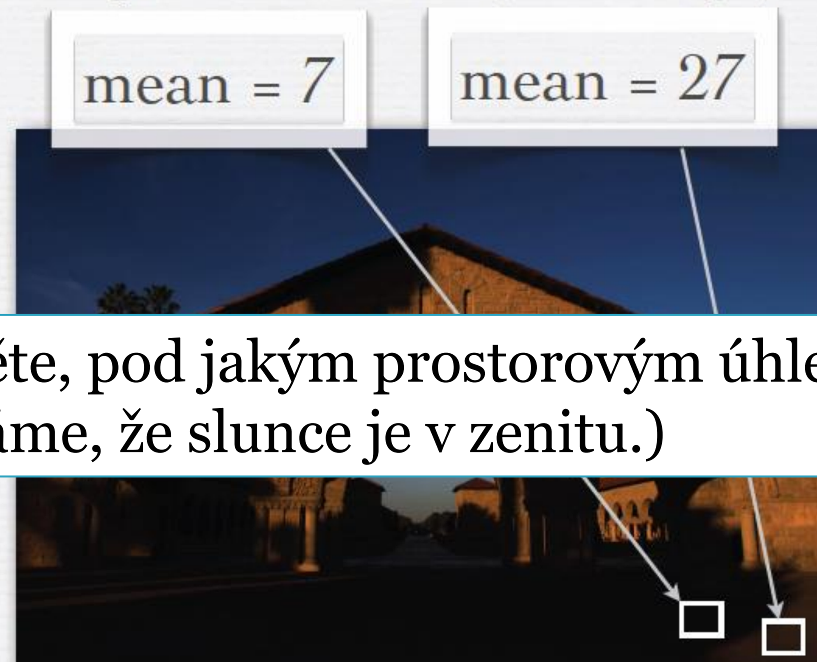
How dark are outdoor shadows?

- luminance arriving on a surface from a full (overhead) sun is 300,000 × luminance arriving from the blue sky, but the sun occupies only a small fraction of the sky
- illuminance on a sunny day = 80% from the sun + 20% from blue sky, so shadows are 1/5 as bright as lit areas (2.3 f/stops)

(Marc Levoy)



JPEG file

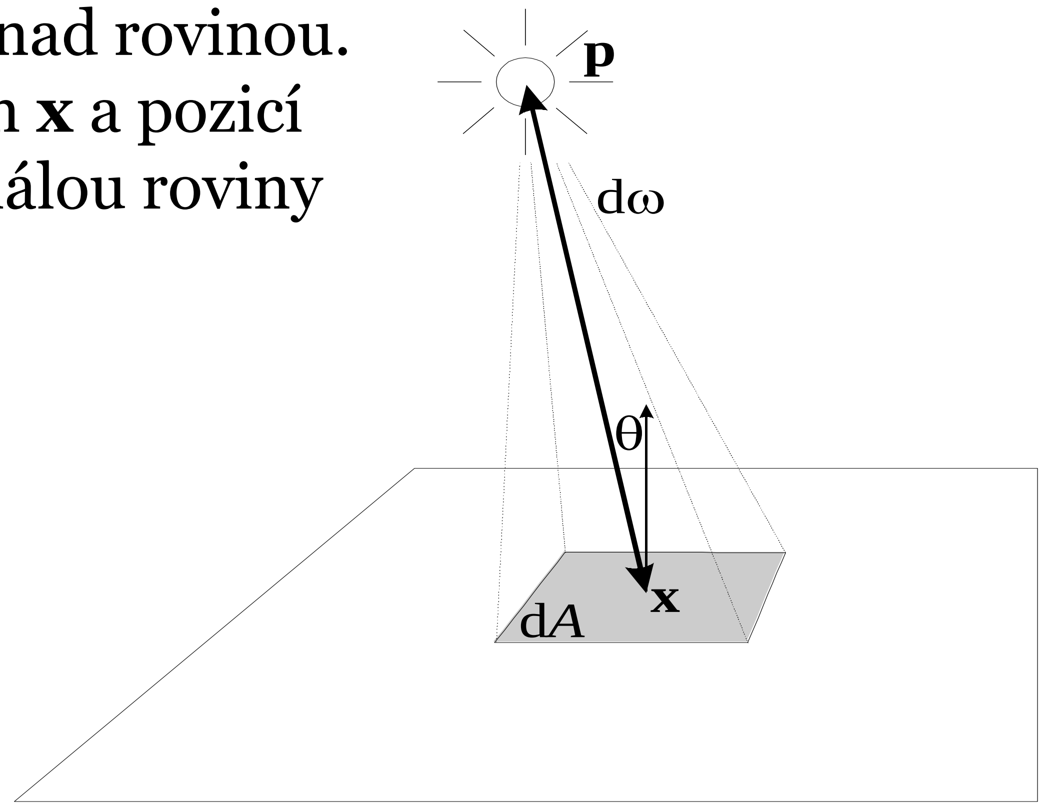


RAW, linearly boosted

Na základě těchto indicií odhadněte, pod jakým prostorovým úhlem pozorujeme slunce? (Předpokládáme, že slunce je v zenitu.)

Otázka

- Jakou hodnotu ozáření (irradiance) v bodě **x** na rovině vyvolá bodový zdroj se zářivostí (intenzitou) $I(\omega)$ umístěný ve výšce h nad rovinou. Spojnice mezi bodem **x** a pozicí světla **p** svírá s normálou roviny úhel θ.



Bodové světlo

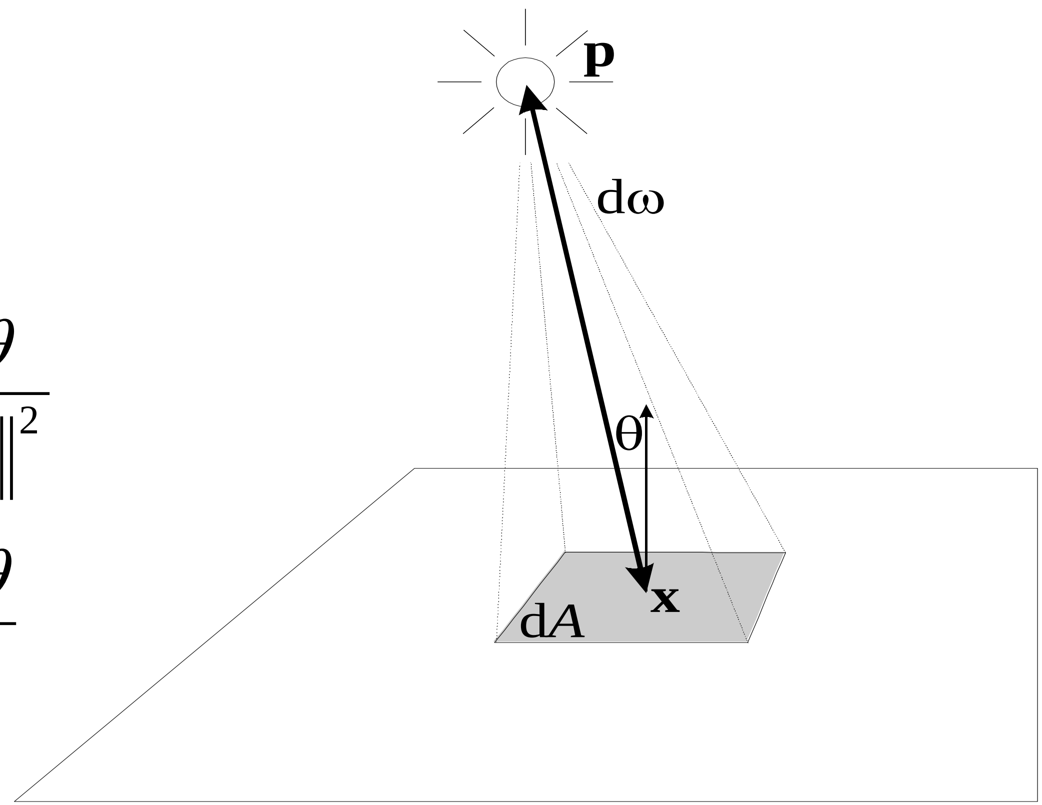
- Ozáření (irradiance) bodu na ploše osvětlené bodovým zdrojem

$$E(\mathbf{x}) = \frac{d\Phi(\mathbf{x})}{dA}$$

$$= \frac{I(\mathbf{p} \to \mathbf{x})\, d\omega}{dA}$$

$$= I(\mathbf{p} \to \mathbf{x}) \frac{\cos\theta}{\|\mathbf{p} - \mathbf{x}\|^2}$$

$$= I(\mathbf{p} \to \mathbf{x}) \frac{\cos^3\theta}{h^2}$$



Plošné světelné zdroje

- Záření plošného zdroje je plně popsáno vyzářenou září (radiancí) $L_e(\mathbf{x},\omega)$ pro všechna místa $\mathbf{x}$ a směry ω na zdroji světla.

- Celkový zářivý tok je dán integrálem $L_e(\mathbf{x},\omega)$ přes plochu zdroje a směry

$$\boxed{\Phi = \int_A \int_{H(\mathbf{x})} L_e(\mathbf{x},\omega) \cos\theta \,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}A}$$

Otázka

- Jaký je vztah mezi emitovanou intenzitou vyzařování (radiositou) $B_e(\mathbf{x})$ a emitovanou září (radiancí) $L_e(\mathbf{x},\omega)$ pro Lambertovský plošný zdroj.

Lambertovský zdroj =
emitovaná radiance nezávisí na směru ω

$$L_e(\mathbf{x},\omega) = L_e(\mathbf{x}).$$

Difúzní (Lambertovský) zdroj světla

- $L_e(\mathbf{x},\omega)$ je konstantní v ω
- Radiozita: $B_e(\mathbf{x}) = \pi L_e(\mathbf{x})$

$$
\begin{aligned}
B_e(\mathbf{x}) &= \int_{H(\mathbf{x})} L_e(\mathbf{x},\omega) \cos\theta \,\mathrm{d}\omega \\
&= L_e(\mathbf{x}) \int_{H(\mathbf{x})} \cos\theta \,\mathrm{d}\omega \\
&= \pi\, L_e(\mathbf{x})
\end{aligned}
$$

Otázka

- Jaký je celkový výkon (tok) Φ **uniformního** Lambertovského plošného zdroje s emitovanou radiancí L_e
  - Uniformní zdroj – zář (radiance) nezávisí na pozici, $L_e(\mathbf{x},\omega) = L_e = \text{const.}$

Uniformní difúzní (Lambertovský) zdroj

- $L_e(\mathbf{x},\omega)$ je konstantní v $\mathbf{x}$ i v $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\Phi_e = A\, B_e = \pi\, A\, L_e}$$